Двадцатый Первый Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 13 октября 2010.

Первый тур. Лига тактик

1. Квадрат 23×23 разбит на квадраты 1×1, 2×2 и 3×3. Какое наименьшее количество квадратов 1×1 может быть при этом использовано?

2. В треугольнике ABC проведена медиана AM и на ней выбрана точка K так, что $\angle BAC = \angle KMC = \angle KCA$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника KMC равноудален от точек A и B.

3. Обозначим через $F(n)$ количество таких непустых подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, что НОД всех элементов такого подмножества взаимно прост с числом n. Докажите, что $\sum\limits_{d|n} F(d) = 2^n - 1$.

4. На плоскости даны n векторов $u_1, u_2, \ldots u_n$, сумма которых равна 0. Для произвольного вектора v длины больше 1, докажите, что $|u_1 - v| + ... + |u_n - v| \geqslant n$.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AD. Биссектрисы углов B и C пересекеают AD в точках E и F соответственно. Оказалось, что $BE = CF$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

6. Натуральное число составлено из цифр 1, 3, 7 и 9, причем каждая цифра использована по крайней мере 1 раз. Докажите, что цифры этого числа можно переставить так, чтобы полученное число делилось на 7.

7. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c) такие, что $a^{b^c} = (b^a)^c$.

8. Дан двудольный граф G. Докажите, что ребра графа G можно покрасить в 2 цвета таким образом, чтобы для любой вершины количества ребер разных цветов, выходящих из этой вершины, отличались не более, чем на 1.

9. Для положительных чисел a, b и c с условием $abc = 1$ докажите неравенство:

$$\frac{a^2+b^2}{a^4+b^4} + \frac{b^2+c^2}{b^4+c^4} + \frac{c^2+a^2}{c^4+a^4} \leqslant a + b + c.$$

10. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для любых вещественных чисел x, y выполняется равенство $f(y + f(x + f(y))) = x + 2y + 3$.